

CALCOLO DEI COEFFICIENTI DI FOURIER CON SOLI SENI O COSENI nell'intervallo $[-\pi ; \pi]$

La **costruzione** di una qualunque oscillazione complessa a partire dalla sovrapposizione di oscillazioni armoniche semplici costituisce un procedimento di **sintesi**.

La **decomposizione** di una oscillazione complessa nelle sue oscillazioni armoniche costituisce, per così dire, il procedimento inverso della sintesi e viene denominato analisi spettrale o **analisi di Fourier**. Tale analisi offre la base teorica per innumerevoli applicazioni.

In matematica una serie di Fourier, quindi, è la rappresentazione di una funzione $f(x)$ periodica come combinazione lineare infinita di funzioni della forma **$\cos(nx)$** e **$\sin(nx)$** :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

dove

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad , \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

i coefficienti a_n e b_n , detti coefficienti di Fourier, esprimono le ampiezze ovvero i pesi delle sinusoidi e cosinusoidi, $a_0/2$ corrisponde al valor medio in un periodo della funzione $f(x)$.

Funzioni pari e dispari

Considerato che il *coseno* è una funzione *pari* e il *seno* è una funzione *dispari* è interessante approfondire le caratteristiche di tali funzioni. Si dice che una funzione $f(x)$:

- è **pari** se per ogni x $f(-x) = f(x)$, ad esempio le funzioni x^2 , x^4 , $\cos(x)$ sono pari. Tali funzioni sono simmetriche rispetto all'asse Y;
- è **dispari** se per ogni x $f(-x) = -f(x)$, ad esempio le funzioni x , x^3 , $\sin(x)$ sono dispari. Se di tali funzioni ruotiamo il ramo positivo attorno all'asse X, il nuovo ramo diventa simmetrico col ramo non ruotato rispetto all'asse Y.

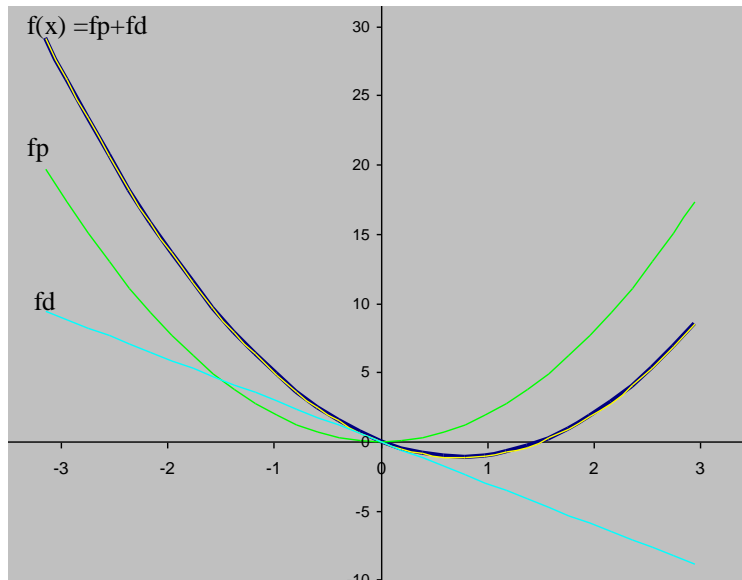
Ogni funzione $f(x)$ può essere decomposta in una funzione pari **fp** e in una funzione dispari **fd** .

Nella figura di destra una funzione $f(x)$ è stata scomposta in una **fp** e in una **fd** .

Ricordando che **$fp(-x) = fp(x)$** e **$fd(-x) = -fd(x)$** dal grafico si deduce che

- per il ramo di sinistra **$f(-x) = fp + fd$**
- per il ramo di destra **$f(x) = fp - fd$** (1)

sommando le (1) si ottiene $f(xi) + f(-xi) = 2*fp$ da cui $fp = (f(x) + f(-x))/2$
 sottraendo le (1) si ottiene $f(xi) - f(-xi) = 2*fd$ da cui $fd = (f(x) - f(-x))/2$ (2)



Nota la $f(x)$ con le (2) si possono ricavare la fp e la fd .

Esempio: $y=2x^2-3x$

per $xi=2$ $f(2) = 2$ ed $f(-2) = 14$ dalle (2) possiamo ricavare

$$fp = (2 + 14) / 2 = 8$$

$$fd(2) = (2 - 14) / 2 = -6 \quad fd(-2) = 6$$

per $xi=1$ $f(1) = -1$ ed $f(-1) = 5$ dalle (2)

$$fp(2) = fp(-2) = 2 \quad fd(1) = -3 \quad fd(-1) = 3$$

Della $y=2x^2-3x$ è facile notare che la funzione pari è $y=2x^2$ mentre la funzione dispari è $y=-3x$

Scomponiamo, allora, una funzione $f(x)$ in una funzione dispari fd e in una funzione pari fp , e calcoliamo i coefficienti di Fourier di queste due funzioni. Ricordiamo che per la fp tutti i coefficienti bi dei seni sono = 0 mentre per la fd sono = 0 tutti i coefficienti ai dei coseni.

Stante le proprietà di simmetria delle 2 funzioni, per calcolare tali coefficienti è sufficiente considerare una metà di ogni funzione (ad esempio il ramo negativo delle x).

Considerata ad esempio la funzione $y = x^2 + x$, i coefficienti a_i b_i (con $i = 1, 2, \dots, 16$) con il metodo di Fourier sono:

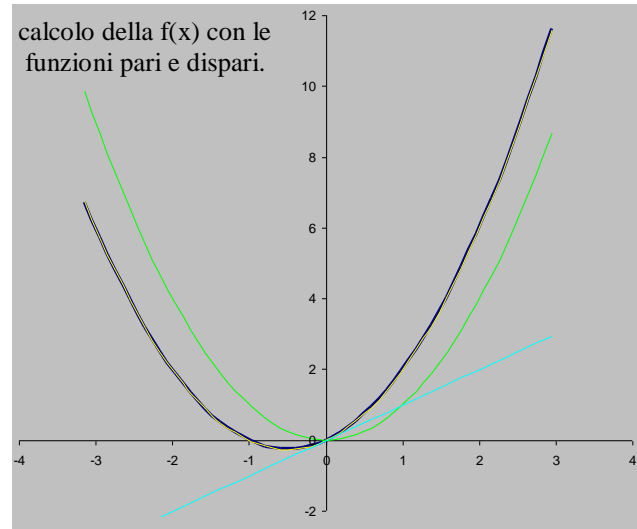
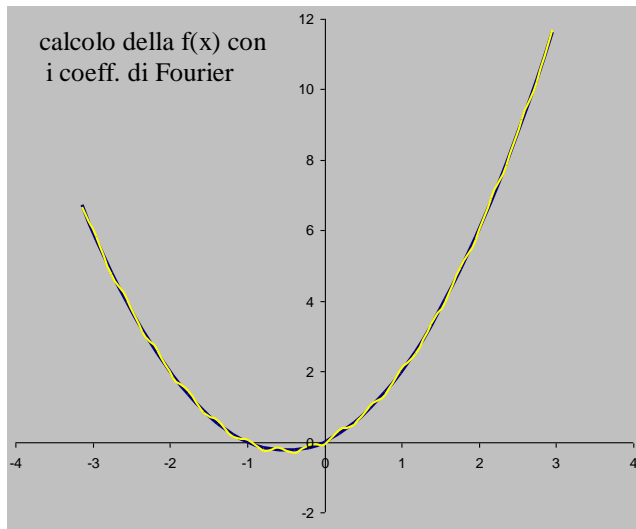
a0	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12	a13	a14	a15	a16
6,40	-3,82	0,82	0,26	0,07	0,02	-0,07	0,10	-0,12	0,13	-0,14	0,15	-0,15	0,15	0,16	0,16	-0,16
b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7	b8	b9	b10	b11	b12	b13	b14	b15	b16	

1.99 -0.99 0.65 -0.47 0.37 -0.29 0.24 -0.20 0.16 -0.13 0.10 -0.08 0.06 -0.04 0.02 0.00

I coefficienti a_i b_i rispettivamente della funzione pari fp e della funzione dispari fd sono invece:

a0	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12	a13	a14	a15	a16
6,58	-4,01	1,01	-0,46	0,26	-0,17	0,12	-0,10	0,08	-0,06	0,06	-0,05	0,05	-0,04	0,04	-0,04	0,04
b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7	b8	b9	b10	b11	b12	b13	b14	b15	b16	
1,99	-0,99	0,65	-0,47	0,37	-0,29	0,24	-0,20	0,16	-0,13	0,10	-0,08	0,06	-0,04	0,02	0,00	

Si fa notare che, sebbene le aree siano state computate in entrambi i casi con il metodo dei rettangoli, i coefficienti a_i sono diversi.



Nei due grafici sopra sono riportate in giallo: a *sinistra* la curva calcolata con i coeff. a_i b_i di Fourier, a *destra* la curva calcolata con i coeff. delle funzioni pari e dispari. Notiamo la migliore approssimazione della curva di destra alla funzione $f(x)$ (parabola di colore nero).

Consideriamo adesso i coeff. della funzione dispari $f(x) = x$

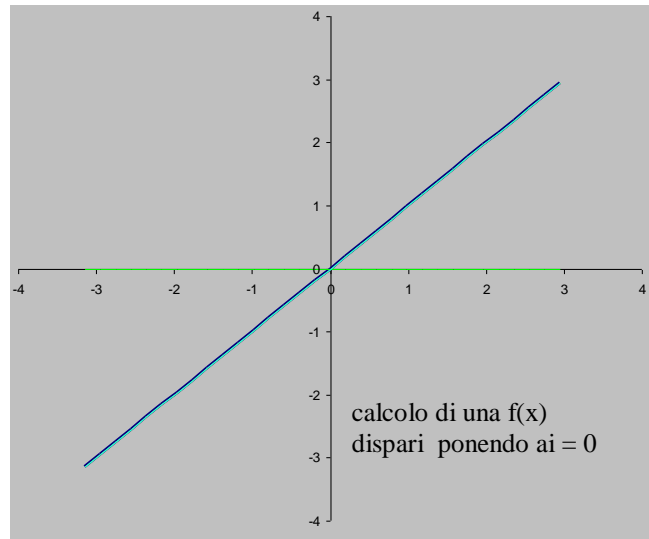
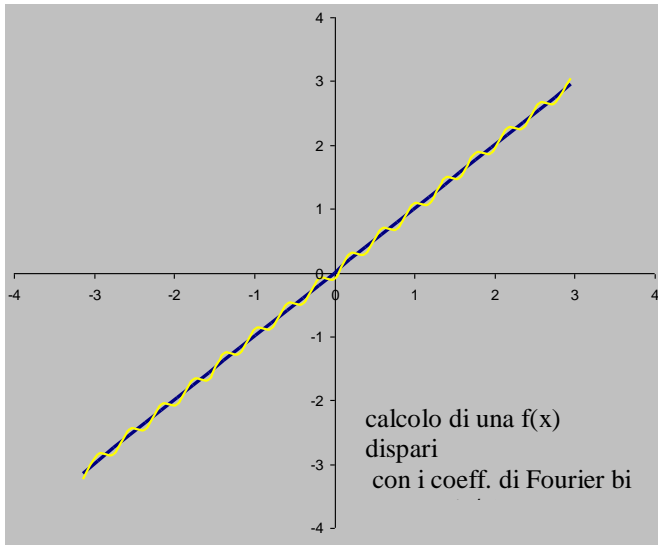


Grafico sopra a sinistra - Coefficienti a_i b_i (con $i = 1, 2, \dots, 16$) con il metodo di Fourier :

ao	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12	a13	a14	a15	a16
-0.20	0.20	-0.20	0.20	-0.20	0.20	-0.20	0.20	-0.20	0.20	-0.20	0.20	-0.20	0.20	-0.20	0.20	-0.20
b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7	b8	b9	b10	b11	b12	b13	b14	b15	b16	
1.99	-0.99	0.65	-0.47	0.37	-0.29	0.24	-0.20	0.16	-0.13	0.10	-0.08	0.06	-0.04	0.02	0.00	

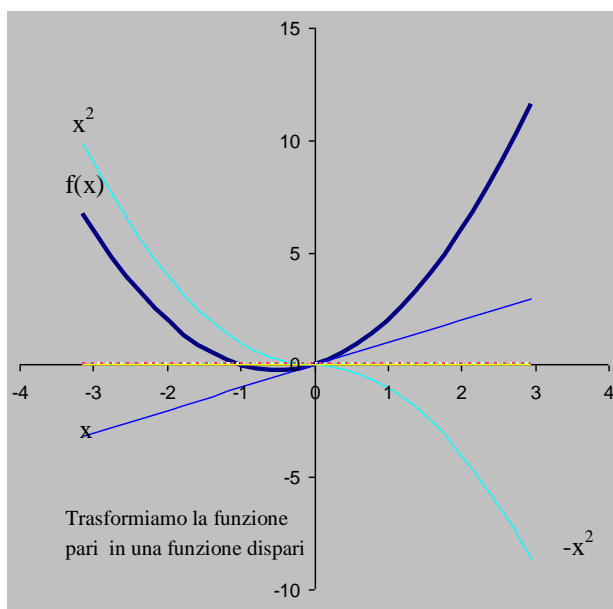
Grafico sopra a destra - Coefficienti a_i b_i con le funzioni pari e dispari:

a0	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12	a13	a14	a15	a16
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7	b8	b9	b10	b11	b12	b13	b14	b15	b16	
1,99	-0,99	0,65	-0,47	0,37	-0,29	0,24	-0,20	0,16	-0,13	0,10	-0,08	0,06	-0,04	0,02	0,00	

Si noti che i coefficienti b_i calcolati con i due metodi sono uguali. I coefficienti a_i col primo metodo sono $\neq 0$ invece col secondo metodo sono tutti $=0$.

Il grafico di destra evidenzia che la curva calcolata con la funzioni dispari coincide con la funzione $f(x)=x$.

Ciò significa che i coefficienti b_i esatti.



Se consideriamo invece una funzione pari, calcolando i coefficienti a_i , il grafico che si ottiene non coincide con la funzione pari, cioè non si ottengono valori esatti.

Proviamo allora a **trasformare la funzione pari in una funzione dispari** ed a calcolarne i coefficienti.

Ad esempio, se abbiamo la funzione pari $f(x) = x^2$, la funzione dispari si ottiene ruotando solo

il ramo delle x positive attorno all'asse x, la funzione diventa: vedi *curva azzurra* del grafico

$$y = x^2 \quad \text{per } x < 0$$

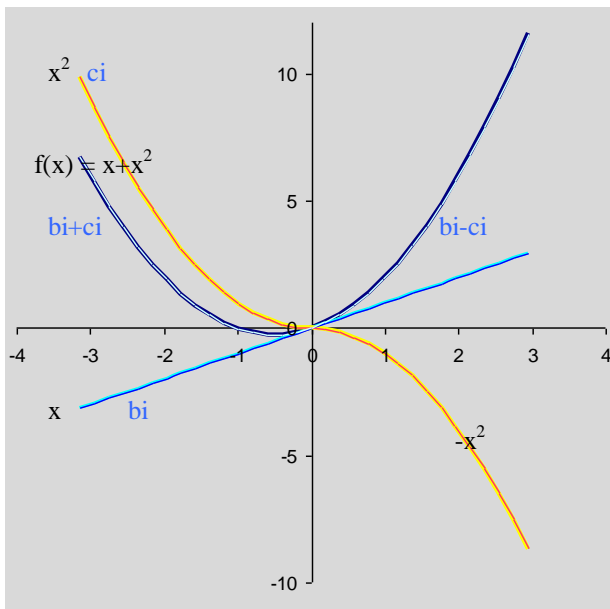
$$y = -x^2 \quad \text{per } x > 0$$

In tale modo di questa funzione pari resa dispari possiamo calcolare i coefficienti *ci* con la funzione dispari *sin(nx)*.

I valori di questi coefficienti sono:

c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7	c8	c9	c10	c11	c12	c13	c14	c15	c16
-3,72	3,10	-1,94	1,49	-1,13	0,92	-0,74	0,62	-0,50	0,41	-0,33	0,26	-0,19	0,12	-0,06	0,00

Con tali coefficienti è possibile rappresentare, in modo esatto, la funzione pari resa dispari, notare la *curva rossa* all'interno della curva gialla che rappresenta la funzione pari resa dispari.



Calcolati i coefficienti *bi* e *ci* di una funzione generica *f(x)*, bisogna ricomporre tali coefficienti per ritrovare la funzione *f(x)*. In particolare:

- per ritrovare il ramo sinistro della *f(x)* occorre sommare le funzioni
- $f_d + f_p$ ovvero sommare i coeff. $bi+ci$,
- per ritrovare il ramo destra della *f(x)* occorre sottrarre le funzioni
- $f_d - f_p$ ovvero sottrarre i coefficienti $bi-ci$.

Nel grafico è stata riportata la $f(x) = x^2 + x$ che è stata decomposta

nella funzione dispari $y = x$, e nella funzione pari resa dispari $y = +/-x^2$ nonché altre 3 curve, perfettamente sovrapposte alle prime.

Pertanto, dati in un intervallo $[-\pi ; +\pi]$ $N+1$ punti, sono sufficienti N coefficienti ed $N/2$ sinusoidi per descrivere una funzione che passa per tali punti.

Le formule per il calcolo dei coefficienti sono:

$$b_i = 2 * (1/2 * (y_1 - y_{n+1}) * \sin(i * x_1) + \sum_{s=2}^{N/2} ((y_s - y_{n+1-s}) * \sin(i * x_s)) / N$$

$$c_i = 2 * (1/2 * (y_1 + y_{n+1}) * \sin(i * x_1) + \sum_{s=2}^{N/2} ((y_s + y_{n+1-s}) * \sin(i * x_s)) / N \quad (i=1, 2, \dots, N/2)$$

(1)

Poiché $x_1 = -\pi$ ne segue che $\sin(i * x_1) = 0$ per cui le (1) diventano

$$b_i = 2 * (\sum_{s=2}^{N/2} (y_s - y_{n+1-s}) * \sin(i * x_s)) / N$$

$$c_i = 2 * (\sum_{s=2}^{N/2} (y_s + y_{n+1-s}) * \sin(i * x_s)) / N \quad (i=1, 2, \dots, N/2) \quad (1a)$$

Calcolati i coefficienti b_i e c_i , è possibile rappresentare esattamente la funzione $f(x)$.

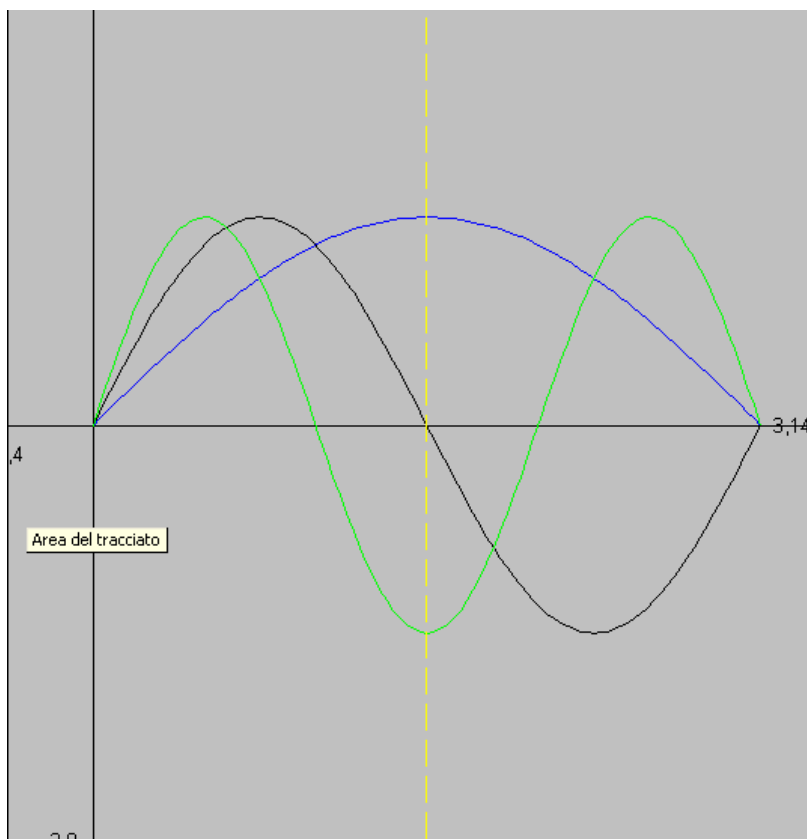
$$f(x) = \sum_{s=1}^{N/2} (b_s + c_s) * \sin(s * x) \quad \text{per } x \text{ nell'intervallo } [-\pi; 0]$$

$$f^*(x) = \sum_{s=1}^{N/2} (b_s - c_s) * \sin(s * x) \quad \text{per } x \text{ nell'intervallo } [0; \pi] \quad (2)$$

Il segnale può, cioè, essere scomposto per metà nella somma di $N/2$ armoniche di coeff. $b_s + c_s$, per l'altra metà nella somma di $N/2$ armoniche di coeff. $b_s - c_s$, dove i coeff. b_s coincidono con i coeff. di Fourier per la parte dispari del segnale.

bi+ci	-1,72	2,11	-1,29	1,02	-0,77	0,63	-0,51	0,42	-0,34	0,28	-0,22	0,17	-0,13	0,08	-0,04	0,00
bi-ci	5,71	-4,09	2,59	-1,96	1,50	-1,22	0,98	-0,81	0,66	-0,54	0,43	-0,34	0,25	-0,16	0,08	0,00

per il ramo sinistro
per il ramo destro



Calcolo dei coefficienti di Fourier con soli SENI o COSENI nell'intervallo $[0; 2\pi]$

Quanto sopra detto per fare rilevare che i coefficienti a_i calcolano la parte pari della $f(x)$ mentre i coefficienti b_i la parte dispari della $f(x)$.

Consideriamo adesso le funzioni $\text{sen}(1 * x)$, $\text{sen}(2 * x)$, $\text{sen}(3 * x)$, ... $\text{sen}(n * x)$ per x nell'intervallo $[0; \pi]$ *vedi figura*

Si nota che, rispetto all'asse $x = \pi/2$:

- tutte le funzioni $\sin(i)$ con i **pari** sono funzioni **dispari**;
- tutte le funzioni $\sin(i)$ con i **dispari** sono funzioni **spari**.

Ricordando che una funzione $f(t)$ di periodo T e frequenza $f = 1/T$, può essere considerata come avente periodo 2π con la trasformazione della variabile: $x = t*(2\pi/T) = t*(2\pi*f)$,

“stiriamo” le funzioni suddette in modo da raddoppiare il loro periodo a

$[0; 2\pi]$ cioè $\sin(1*x)$ con $\sin(1*x/2)$ e in generale $\sin(i*x)$ con $\sin(i*x/2)$. mentre l'asse di simmetria diventa $x = \pi$.

Trasliamo adesso la $f(x)$ in avanti di π : $f(x-\pi)$ in modo che il suo asse sia

$$x = \pi.$$

Possiamo adesso calcolare i coefficienti b_i con la formula di Fourier per $x \in [0; 2\pi]$:

$$b_i = 1/\pi * \int_0^{2\pi} f(x-\pi) * \sin(i*x) dx \quad \text{per } x \in [0; 2\pi] \text{ si trovano alternativamente coeff. } b_i \text{ pari}$$

e b_i dispari.

Se invece della $f(x)$ si conoscono N punti y_1, y_2, \dots, y_N equidistanziati: $b_i = 2 * (\sum_{s=1}^N y_s * \sin(i*x_s)) / N$

Se le $y_i = 0$ tranne il punto $y_1 \Rightarrow b_i = 2 * y_1 * \sin(i*x) / N$ con $i = 1, 2, \dots, N$

$$y_1 = \sum_{s=1}^N (b_i * \sin(i*x_s)) = 2 * \sum_{s=1}^N (y_1 * \sin(i*x_s) * \sin(i*x_s) / N) =$$

$$2 * y_1 * \sum_{s=1}^N \sin(i*x_s)^2 / N$$

da cui
$$N/2 = \sum_{s=1}^N \sin(i*x_s)^2 \quad (4)$$

L'intervallo $[0; 2\pi]$ è stato diviso in N parti uguali: $i * x_s = i * 2\pi / N$ (con $i = 1, 2, \dots, N$)

La (4) può essere ricavata dal Teorema di Pitagora: $\sin(i*x_s)^2 + \cos(i*x_s)^2 = 1$ da cui

$$\sum_{s=1}^N (\sin(i*x_s)^2 + \cos(i*x_s)^2) = N$$

Conclusione:

Un segnale/funzione costituito da N punti può essere scomposto nella somma di N sinusoidi o cosinusoidi e viceversa con N sinusoidi è possibile costruire un segnale/funzione che passa per N punti qualsiasi.

Le $f(x_s) = \sum_{i=1}^N c_i \cdot \text{sen}(i \cdot x_s)$ con $(s=1, 2, \dots, N)$ costituiscono un sistema lineare di N equazioni in N incognite C_i .