SISTEMI DINAMICI DISCRETI e FRATTALI

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

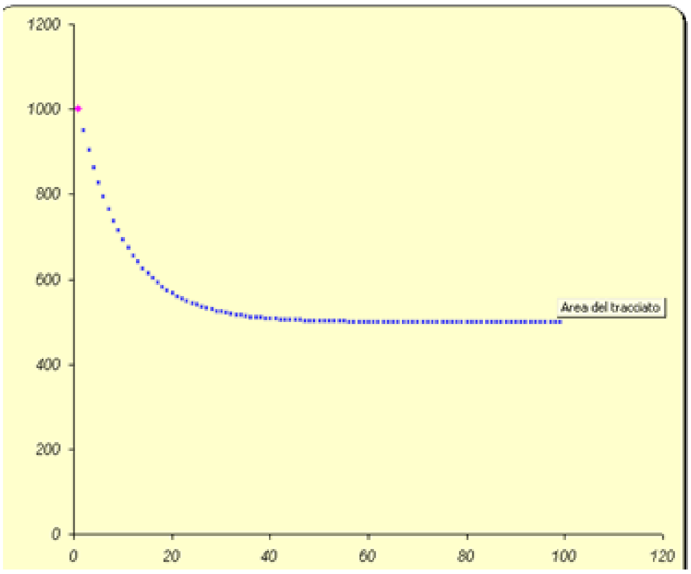
I **sistemi dinamici discreti**, sono delle successioni per ricorrenza e costituiscono un settore della matematica molto vasto con aspetti sorprendenti.

SDD ad una dimensione

1. ***In un piccolo paese di 1.000 abitanti il tasso di mortalità annuo è del 10%; fortunatamente ogni anno nascono 50 bambini. Qual è nel tempo l'evoluzione della popolazione?***

Questo piccolo problema può dare l'idea dell'importanza dei **sistemi dinamici discreti** nella modellazione dei problemi reali: è possibile descrivere in modo relativamente facile una o più grandezze (*sistema*) che evolvono (*dinamico*) a passi costanti della variabile *tempo* (*discreto*). Il sistema può essere globalmente anche complesso, ma *in piccolo* è pienamente caratterizzato da una semplice legge ricorsiva.

Per esempio il nostro problema, indicando con x_t la popolazione al tempo t, è descritto dalla legge



$$x_{t+1} = x_t - 0.1x_t + 50$$

cioè $$x_{t+1} = 0.9x_t + 50$$

e dalla condizione popolazione iniziale

$$x_0 = 1000$$

Partendo dalla condizione iniziale possiamo costruire ogni elemento della successione sulla base della conoscenza dell'elemento precedente.

$x_0 = 1000$, $x_1 = 0.9x_0 + 50 = 0.9*1000+50 = 950$

$x_2 = 0.9x_1 + 50 = 0.9*950 + 50 = 905$

Se continuiamo i calcoli si nota che i valori di *xn* tendono a 500.

Se ad x_0 avessimo dato un altro valore avremmo ottenuto un'altra successione i cui valori tendono ancora a 500.

Il valore 500 costituisce l'equilibrio del sistema $x_{t+1} = 0.9x_t + 50$

Per ottenere il punto di equilibrio deve essere $x_{t+1} = x_t$ per cui il sistema diventa $x_t = 0.9x_t + 50$

cioè $0.1\,x_t = 50$ quindi $x_t = 500$.

*Nel programma <u>SDD</u> poniamo le celle: B2 =1, B3=B2+1, C2 =1000*a, C3 =0.9*C2+50 (la cella B2 rappresenta il 1° anno, la cella B3 il 2° anno, la cella C2 il valore iniziale **xo,** la cella C3 descrive il sistema). Se variamo il parametro **a** varia il valore iniziale **xo** ma non cambia il punto di equilibrio = 500.*

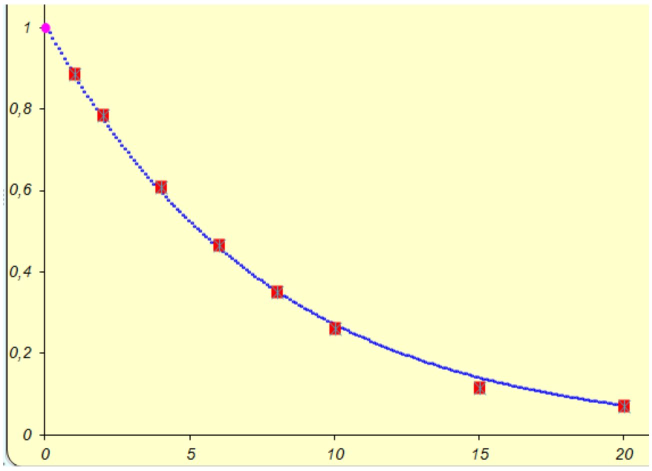
2. ***Se in una banca, che fa un tasso d'interesse annuale b = 4%, depositiamo una somma a_0 = 8.000€ dopo 20 anni a quanto ammonta il capitale, considerato che annualmente la banca trattiene una somma d = 5€?***

Al 1° anno si ha $a_1 = a_0+b*a_0-d$, ovvero $a_1 = 8.000+0{,}04*8.000-5$

*Nel programma <u>SDD</u> si scrive nelle celle: B2 =1, B3=B2+1, C2 =8.000, C3 =8.000+0,04*8.000-5 = 1,04*8.000-5*

cella J2=20 (n° anni).

3. ***La pressione atmosferica* p *diminuisce all'aumentare della quota* h. *Essa è dovuta al peso della colonna di aria sovrastante. Considerato, altresì, che la densità dell'aria* ρ *è proporzionale alla pressione* ρ=c*p *, con* c=0,13 *descrivere la legge di variazione della pressione con la quota.***



Supponendo di considerare una colonna d'aria con base di area A=1 e una differenza di quota $\mathbf{h_0}$-$\mathbf{h_1}$ = 0,1Km., , posto $\mathbf{h_0 = 0}$ **e** $\mathbf{p_0 = 1}$ **atm.**, la differenza di pressione è:

$$\mathbf{p_1 = p_0 - \rho*(h_0 - h_1) = p_0 - c* p_1 *(h_0 - h_1).}$$

*Nel programma <u>SDD</u> si scrive nelle celle: B2 =0, B3=B2+0,1, C2 =1, C3 =C2 - a*C2*0,1*

*Ponendo nella cella J2=200, si ricava la distribuzione della pressione fino alla quota h = 200*0,1=20km.*

Nella figura in rosso sono riportati i valori reali, in blu la curva col SDD. Si noti che, per piccoli incrementi di quota dh, tale sistema approssima l'equazione differenziale del 1° ordine: dp/dh = -c*p.

SDD a due dimensioni

Il sistema precedente era un sistema *unidimensionali*, abbiamo cioè analizzato l'evoluzione di una sola grandezza. Possiamo analizzare sistemi a più dimensioni.

4. ***Su un corpo fermo di massa m_0 =20 kg agisce una forza costante F=5N. Se la sua massa diminuisce con continuità, tale che ad ogni intervallo dt=0,05 sec. diminuisce di dm = 0,1 kg qual è la velocità del corpo dopo 5 secondi?***

Dalla 2ª legge della dinamica si ha: *dv/dt = F/m da cui* $v_1 = v_0+ (F/m)*dt$

Dopo il 1° dt= 0,05sec. si ha: $m_1 = m_0-dm$ $v_1 = v_0+(F/m_1)*dt$

*Nel programma <u>SDD</u> si scrive nelle celle: B2 =20, B3=B2-0,1, C2 =0, C3 =C2+(5/B3)*0,05*

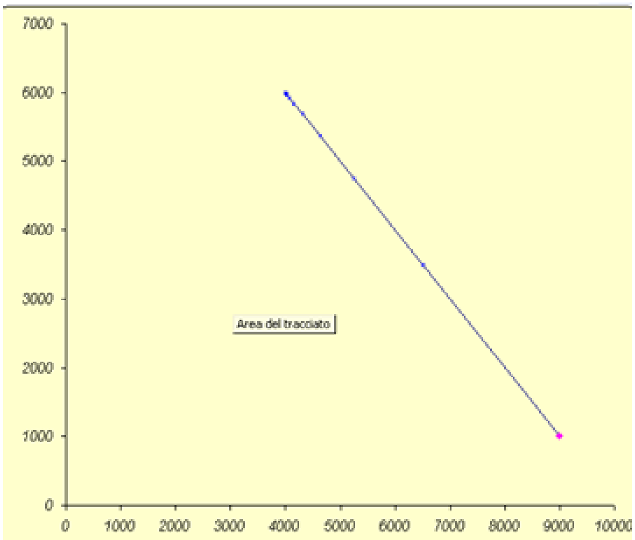
cella J2=100 (= 5/0,05 n° intervalli). Si ottiene il grafico/funzione: v(m).

Si noti che tale sistema approssima l'equazione differenziale del 1° ordine: *dv* = *(F/m)*dt.*

- Catene di Markov

Consideriamo il seguente problema. Un sistema è costituito dai 2 stati A e B.

5. ***Ad ogni fase il 70% resta in A e il 20% di B passa in A, mentre il 30% di A passa in B e l'80% resta in B.***



Cioè $A_1 = 0.7A_0 + 0.2B_0.$

$B_1 = 0.3A_0 + 0.8B_0.$

Il sistema è caratterizzato da una *matrice* in cui la somma delle colonne è sempre 1: la matrice descrive un sistema chiuso, senza entrate né uscite (la somma di Ai e Bi si conserva costante durante l'evoluzione del sistema).

Una successione di questo tipo è chiamata *catena di Markov* (Andrei Markov, 1856-1922).

Poniamo le condizioni iniziali Ao =9.000 Bo = 1.000

Si sa che nel punto di equilibrio deve essere $A_n = 0.7A_n + 0.2B_n$ $B_n = 0.3A_n + 0.8B_n$

cioè $0.3A_n = 0.2Bn$ $0.2Bn = 0.3An$ $B_n = 1.5A_n$

Considerato che $A_n + Bn=10.000$ $An+1.5An = 10.000$ da cui $An = 4.000$ *e* $Bn = 6.000.$

*Nel programma <u>SDD</u> poniamo le celle: B2 = 9.000, B3 = 0.7*B2+0.2*C2, C2 = 1.000, C3 = 0.3*B2+0.8*C2*
Le celle B2 e C2 sono i valori iniziali, le celle B3 e C3 invece descrivono il sistema.
Si noti che il sistema tende al punto di equilibrio (4.000; 6.000).

La mappa logistica

La mappa logistica è un mappa polinomiale, spesso citata come un esempio di quanto può essere complesso/caotico il comportamento che può risultare da una semplice equazione dinamica non lineare.

Matematicamente, la mappa logistica è scritta:

$$x_{n+1} = r*x_n*(1-x_n).$$

Dove:

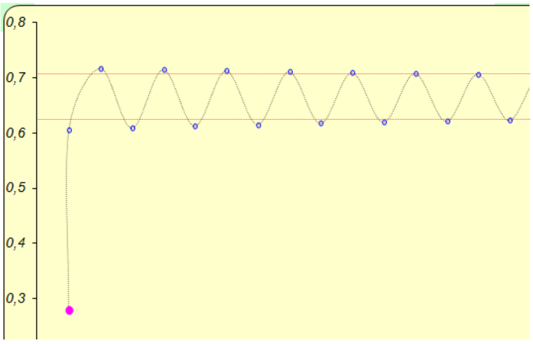
- x_n è un numero compreso tra 0 e 1, e rappresenta la popolazione in un anno n;
- x_0 rappresenta la popolazione iniziale (all'anno 0);
- **r** è un numero positivo, e rappresenta un tasso combinato tra la riproduzione e la mortalità.

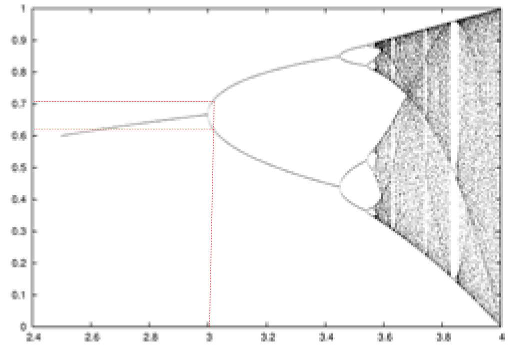
Questa equazione non lineare descrive due effetti:

- la crescita di tipo esponenziale della popolazione (effetto più visibile quando la popolazione è piccola);

la competizione intraspecifica quando la popolazione è numerosa, vale a dire la mortalità aggiuntiva dovuta alla competizione degli individui tra loro per assicurarsi il cibo necessario.

- Questo è tradotto matematicamente dal termine quadratico con segno negativo.



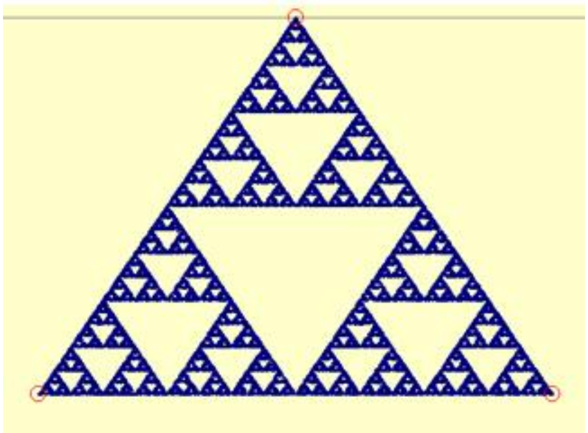


Nella figura partendo da un valore **x_o**= 0,3 ed **r** =3 dopo poche iterazioni i valori di **x_t** oscillano tra 0,62 e 0,7.
La figura è stata ottenuta con il programma SDD ponendo:

B2 = 1, *B3 = 1,* *C2 = 0,3,* *C3 = a*C2*(1-C2)* ed *a = 3*

Ponendo **x_o**<1 e variando *a* da 2,4 a 4 si ottiene la *mappa logistica* (vedi programma *Mappa logistica*).

SDD a più dimensioni - Frattali di Sierpinski



Fra i primi frattali studiati, il più noto è il cosiddetto triangolo di Sierpinski.

Siano dati i vertici di un triangolo, per esempio A, B, C,

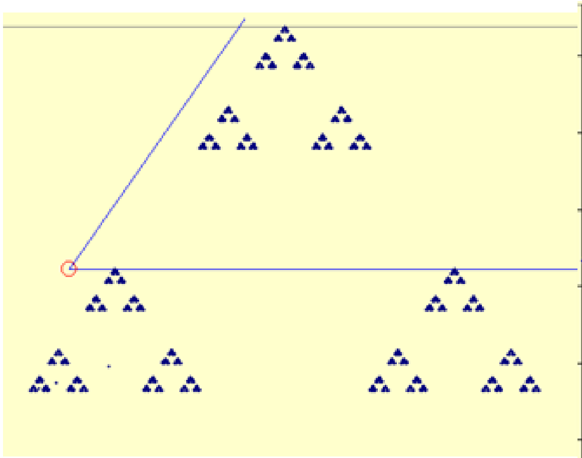
Partiamo da un punto qualsiasi Po. Ora lanciamo un "dado" a tre facce:

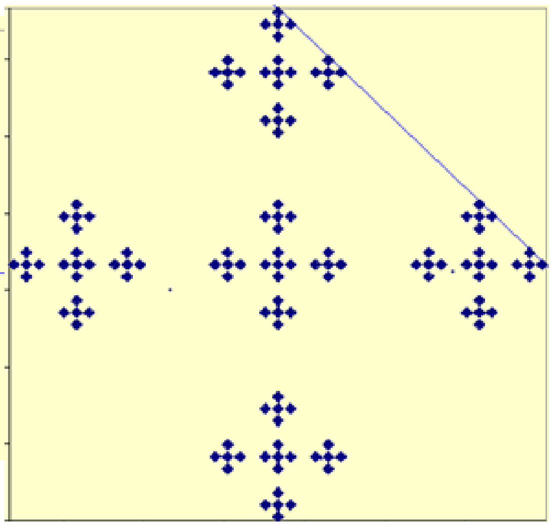
- se esce 1 allora P1 è il punto medio tra Po e A;
- se esce 2 allora P1 è il punto medio tra Po e B;
- se esce 3 allora P1 è il punto medio tra Po e C.

Se si calcolano, in tal modo, migliaia di punti si crea un triangolo che si ripete al suo interno indefinitamente (frattale).

Se invece di prendere il punto medio, cioè di dividere per d =2, dividiamo per **d=3** otteniamo triangolo più piccolo di lato **r_i = r/(d-1) = r/2** e più vicino all'origine (0;0).

Considerato, infatti, che i vertici sono *attrattori* deve essere **r_{i+1} = r_i** quindi ri = (ri+r)/d da cui (d-1)*ri = r **ri = r/(d-1)**





Nell'esempio è rappresentato il triangolo di Sierpinski in cui si è posto d=3. Se ingrandiamo si nota che ogni punto è composto da 3 punti i quali, a loro volta sono composti da 3 punti e così all'infinito.

Ad ogni *passo* **p** i punti diventano $3^{\wedge p}$. 3, 9, 27, …

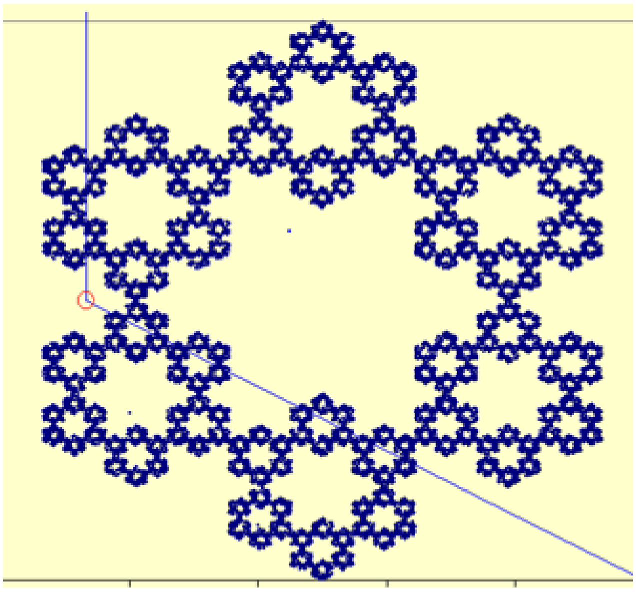
Con lo stesso metodo si possono creare frattali con n punti.

Ad esempio possiamo considerare un pentagono A,B,C, D ed E. Partiamo da un punto qualsiasi Po. Ora lanciamo un "dado" a 5 facce:

- se esce 1 allora P1 è il punto medio tra Po e A;
- se esce 2 allora P1 è il punto medio tra Po e B;
- se esce 3 allora P1 è il punto medio tra Po e C.
- se esce 4 allora P1 è il punto medio tra Po e D;
- se esce 5 allora P1 è il punto medio tra Po e E.

Se si calcolano, in tal modo, migliaia di punti si crea un pentagono di lato **d** che si ripete al suo interno indefinitamente (frattale).

Aumentando il numero di vertici si deve aumentare il valore di **a** in modo tale che i vertice non si influenzino tra loro.



Ad esempio per il quadrato consideriamo d=2+1/3 per il pentagono d=2+2/3 per l'esagono d=3, ecc.

Nell'esempio a fianco è rappresentato un frattale composto da 4+1 punti (4 vertici di un quadrato + 1 punto al centro) e d=3. Se ingrandiamo si nota che ogni quadratino è composto da 5 punti e così all'infinito.

Ad ogni *passo* **p** i punti diventano $5^{\wedge p}$. 5, 25, 125, …

Per i poligoni regolari utilizzare il tasto "Fratt_Polig" per i poligoni non regolari basta inserire le coordinate nelle colonne X Y il tasto "Fratt_Vertici".

Per ottenere l'esagono rappresentato nella figura a fianco è stato posto Polig. = 6, e d=3.

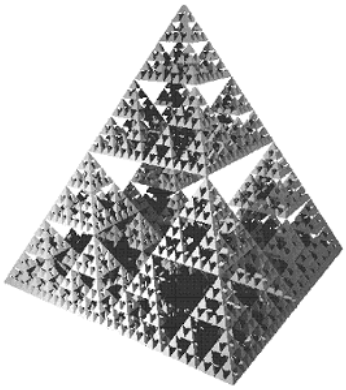
Si noti che la figura principale è un esagono costituito da 6 esagoni più piccoli, 1 per ogni vertice i quali, a loro volta, sono costituiti da 6 esagoni più piccoli e cosi via.

Ad ogni *passo* **p** gli esagoni diventano $6^{\wedge p}$. 6, 36, 216, …

Con il suddetto metodo è possibile creare frattali in 3D. In tal caso possiamo, ad esempio, considerare i vertici di un tetraedro A,B,C e D.

Partire da un punto qualsiasi Po, lanciare un "dado" a 4 facce:

- se esce 1 P1 è il punto medio tra Po e A;
- se esce 2 P1 è il punto medio tra Po e B;
- se esce 3 P1 è il punto medio tra Po e C.
- se esce 4 P1 è il punto medio tra Po e D;



Se si calcolano, in tal modo, migliaia di punti si otterrà un tetraedro che si ripete al suo interno indefinitamente (frattale). Analogamente per altri solidi.

L'unità e i numeri complessi

Nelle operazioni aritmetiche sappiamo che il numero 1 è *neutro* rispetto all'operazione prodotto. Se lo moltiplichiamo varie volte otteniamo sempre l'unità (((1^2)^2)...)^2 = 1^(2^n) = 1.

Basta invece prendere un valore di poco inferiore all'unità che la serie tende allo zero:

0.9 0.9^2=0.81 0.81^2=0.6561 ... ≈ 0.

Mentre, se consideriamo un valore di poco superiore all'unità la serie tende ad infinito:

1.1 1.1^2 = 1.21 1.21^2 = 1.4641 … ≈ ∞.

Il numero complesso

Il numero complesso lo possiamo definire come una grandezza costituita da un numero reale *a* e da un numero immaginario *b* ovvero: *(a , ib)*.

A differenza del numero reale, che può essere rappresentato lungo una retta, il numero immaginario può essere rappresentato su un piano (**piano di Argand)** con un vettore che parte dall'origine ed ha come ascissa *a* e come ordinata *b*.

Il valore $i = (-1)^{1/2}$ per cui: $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ … Tali valori possono essere rappresentati con un vettore unitario che ruota sul piano complesso.

Dati 2 numeri complessi *(a, b) e (c,d):*

la somma $(a, b) + (c,d) = (a+b, c+d)$

il prodotto $(a, b) * (c,d) = (ac-bd , ab+cd)$

Si fa notare che nell'operazione prodotto la parte immaginaria fa ruotare il vettore prodotto, questo fatto sta alla base della creazione del frattale con i numero immaginari

Forma trigonometrica dei numeri complessi

$\mathbf{z} = a + ib$, se poniamo $r_z = \sqrt{a^2 + b^2}$ modulo del numero complesso e $\tan(\alpha) = b/a$

allora $r_z \cdot \cos(\alpha) = a$, $r_z \cdot \sin(\alpha) = b$ e $\mathbf{z} = r_z [\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)]$

Prodotto di numeri complessi in forma trigonometrica:

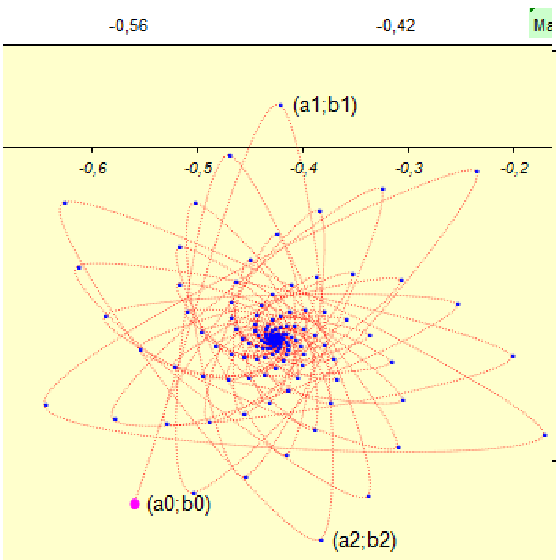
$\mathbf{z} \cdot \mathbf{w} = r_z \cdot r_w \cdot [\cos(\alpha + \beta) + i \cdot \sin(\alpha + \beta)]$

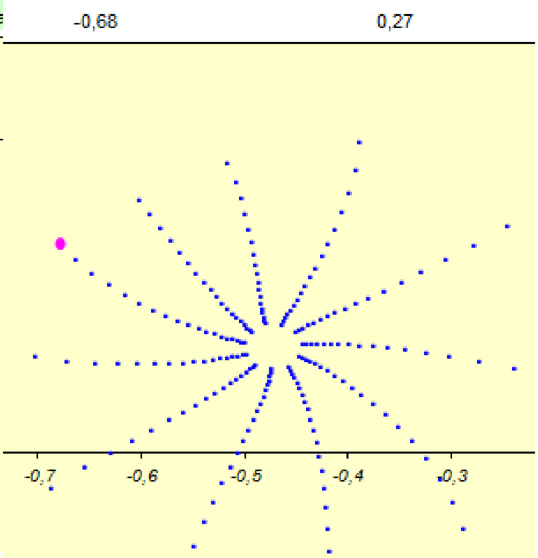
se $\mathbf{z} = \mathbf{w}$ diventa $\mathbf{z}^2 = r_z^2 [\cos(2\alpha) + i \cdot \sin(2\alpha)]$

Insieme di Mandelbrot

Premesso quanto sopra, possiamo iniziare a parlare di frattali con i numeri complessi.

Un **frattale** è un oggetto geometrico che si ripete nella sua struttura allo stesso modo su scale diverse.





Consideriamo questa ricorrenza:

$\mathbf{z_1 = z_0^2 + z_0},$

$\mathbf{z_2 = z_1^2 + z_0},$

$\mathbf{z_3 = z_2^2 + z_0}$

… . Ogni volta che si molti plica, il vettore risultante va ruotando sul piano complesso.

La serie che descrive il suddetto sistema è: $\mathbf{z_{n+1} = z_n^2 + z_0}$ **(4)**

e viene detta insieme di Mandelbrot . Tale serie può convergere ad un punto finito o divergere.

Essa può essere scritta nella forma:

(a_0, b_0) $(a_1 = a_0^2 - b_0^2 + a_0 \ , \ b_1 = 2a_0b_0 + b_0)$ $(a_2 = a_1^2 - b_1^2 + a_0 \ , \ b_2 = 2a_1b_1 + b_0)$ …

Ad esempio: se $(\mathbf{z_0} = -0.56 - i*0.42)$ $a_0 = -0.56$ $b_0 = -0.42$

$a_1 = (-0.56)^2 - (-0.42)^2 - 0.56 = -0.4228$ $\qquad$ $b_1 = 2*0.56*0.42 - 0.42 = 0.0504$

$a_2 = (-0.4228)^2 - 0.0504^2 - 0.56 = -0.383$ $\qquad$ $b_2 = -2*0.4228*0.0504 - 0.42 = -0.4626$

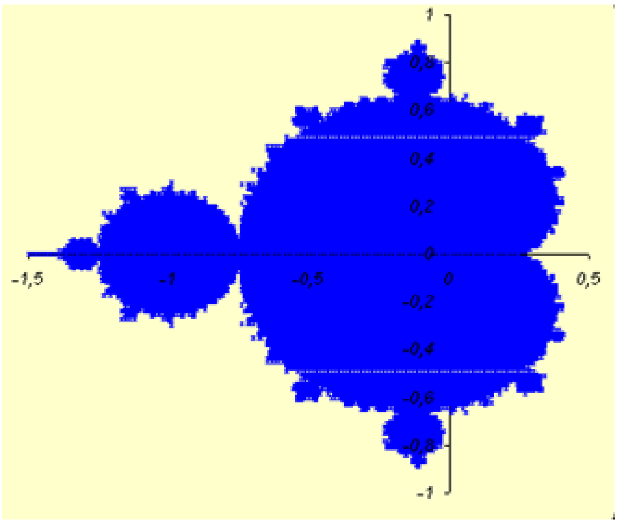
… …

In forma trigonometrica:

$a_1 = r_0^2 \cos(2\alpha_0) + a_0$ $\quad$ $b_1 = r_0^2 \sin(2\alpha_0) + b_0$ $\quad$ con $r_0^2 = a_0^2 + b_0^2$ ed $\alpha_0 = \arctan(a_0 / b_0)$

$a_2 = r_1^2 \cos(2\alpha_1) + a_0$ $\quad$ $b_2 = r_1^2 \sin(2\alpha_1) + b_0$ $\quad$ con $r_1^2 = a_1^2 + b_1^2$ ed $\alpha_1 = \arctan(a_1 / b_1)$

… … …

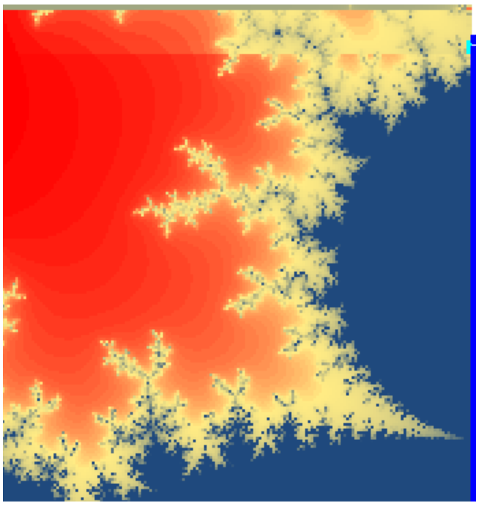


Nella figura a sinistra con <u>*Mandelbrot punto*</u> del programma <u>**Frattali**</u>, relative al punto iniziale $a_0 = -0.56$ $b_0 = -0.42$, sono riportati i primi 300 punti di iterazione della serie (4).

Si noti come tali punti convergono al punto attrattore (-0.44;-0.23).

Se consideriamo i punti (a_0;b_0) nell'intervallo (finestra di calcolo) $-2<a_0<2$ $\quad -2<b_0<2$ dopo un certo numero di iterazioni (ad esempio 100), alcuni divergono a $\pm\infty$ altri convergono a punti finiti.

Se coloriamo solo i punti (a_0;b_0) le cui serie convergono si ottiene la figura di Mandelbrot, di un otto coricato.

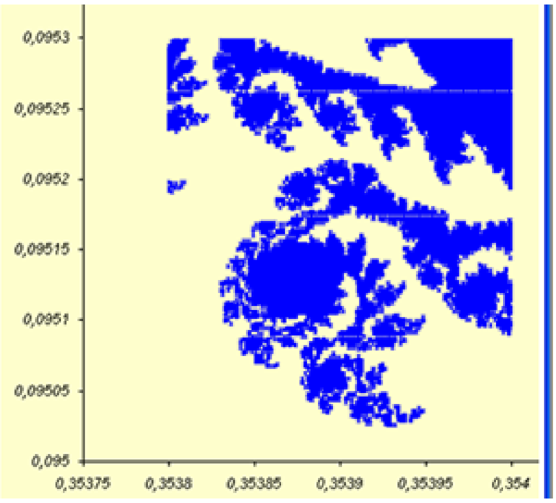


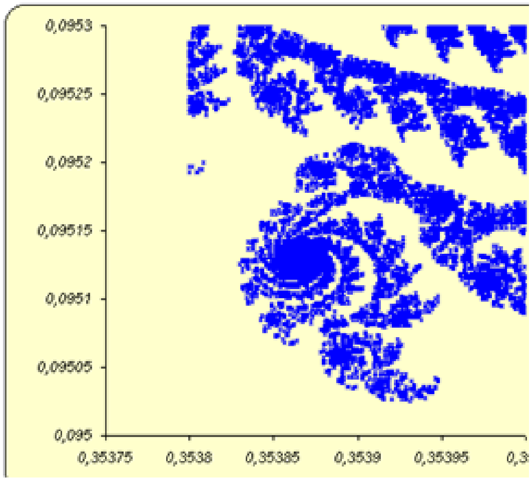
Se ingrandiamo più volte una zona posta al confine, non si riuscirà mai a trovare la linea netta del confine.

Le figure si ripetono in modo simile in scale diverse.

Nelle figure riportate è stata ingrandita una finestra attorno al punto 0.095; 0.355. con 100 iterazioni.

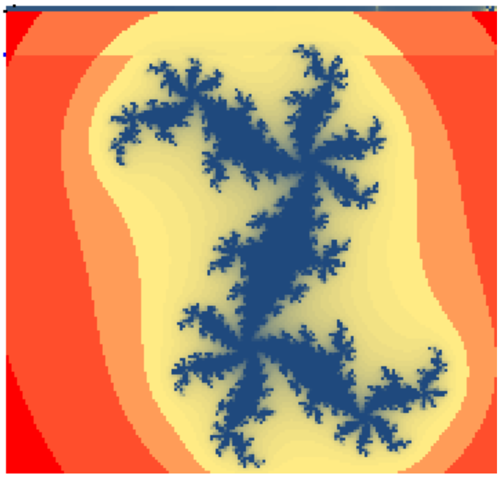
Provate, con il programma <u>**Frattali**</u>, ad ingrandire più volte un altro punto del confine.





L'immagine di sinistra è stata ottenuta con 100 iterazioni, mentre l'immagine di destra con 150 iterazioni. Cioè aumentando il numero di iterazioni alcuni punti che convergevano con 100 iterazioni adesso 150 iterazioni divergono. I frattali vengono rappresentati in maniera spettacolare colorando con colori diversi i punti in relazione al numero di iterazioni necessari a divergere.

Insieme di Julia



L'equazione che descrive l'insieme di **Julia** è simile all'insieme di Mandelbrot:

$$\mathbf{z_{n+1} = z_n^{\,2} + w_0} \quad \textbf{(5)}$$

però a differenza dell'insieme di Mandelbrot, in cui viene descritto il frattale variando $\mathbf{w_0}$ nell'intervallo a[-2;2] , b[-2;2], nell'insieme di **Julia** il frattale viene descritto fissando il punto $\mathbf{w_0}$, e variando il punto $\mathbf{z_0}$ nell'intervallo a[-2;2] , b[-2;2].

Nel programma **<u>Frattali</u>** è possibile definire il punto $\mathbf{w_0}$ di Julia con le coordinate **c1** e **c2.**

Dist.	90	N°iter.	40
c1	0,4	Julia 2	
c2	0,33		

Nell'esempio il frattale è stato disegnato ponendo $\mathbf{w_0}$(0,4;0,33); n° iterazioni eseguite per ogni punti =40; 90 la distanza oltre la quale il punto si considera che diverga

E' possibile pertanto ottenere un frattale per ogni punto $\mathbf{w_0}$ di Julia.

Di solito tali punti vengono considerati lungo la linea di confine del frattale di Mandelbrot..